

“理論”の定式化(2)

宮下英明

A Formula of “Theory” (II)

Hideaki MIYASHITA

目 次

- 4 理論の準超越論的定義
 - 4.1 帰納的集合のシステムという形での、理論の定義
 - 4.2 理論の定義
 - 4.3 証明
 - 4.4 例——加法の理論
 - 4.4.1 理論の定式化
 - 4.4.2 証明の例
- 5 理論の間の関係
 - 5.1 理論の同型
 - 5.2 理論の強弱
 - 5.3 理論の部分
 - 5.4 “論理体系”
- 6 論理
 - 6.1 理論としての論理
 - 6.2 命題論理
 - 6.2.1 文生成システム
 - 6.2.2 文変形システム
 - 6.2.3 推論システム
 - 6.3 述語論理
 - 6.3.1 “一般化規則”の排除
 - 6.3.1.1 “一般化規則”の所在
 - 6.3.1.2 一般化規則と演繹定理との非両立性
 - 6.3.2 文生成システム
 - 6.3.3 自由変項, 束縛変項
 - 6.3.4 “式”, “文”
 - 6.3.5 文変形システム
 - 6.3.6 推論システム
 - 6.3.7 簡約記号 \exists の導入
 - 6.4 等号をもつ述語論理
 - 6.4.1 文生成システム
 - 6.4.2 文/テキスト変形システム
 - 6.5 関係/関数記号をもつ述語論理
 - 6.5.1 文生成システム
 - 6.5.2 文/テキスト変形システム
 - 6.6 等号をもつ述語論理の構成一覧
 - 6.7 命題/述語論理の上の理論
 - 6.8 メタ定理, 定理シエマ
 - 6.8.1 メタ定理
 - 6.8.2 定理の証明と定理シエマの証明
 - 6.8.3 命題論理の定理シエマの証明例
 - 6.8.4 述語論理の定理シエマの証明例
- 7 自然数論
 - 7.1 ペアノの公理まで
 - 7.1.1 土台となる文生成システム
 - 7.1.2 “式”, “文”
 - 7.1.3 式変形システム/推論システム
 - 7.1.4 命題論理, 述語論理との関係
 - 7.2 加法と乗法の導入
 - 7.2.1 加法と乗法の導入
 - 7.2.2 加法, 乗法の基本定理
 - 7.3 順序関係の導入
 - 7.3.1 順序関係の導入
 - 7.3.2 順序関係の基本定理

4 理論の準超越論的定義

4.1 帰納的集合のシステムという形での、理論の定義

われわれは、理論を、有限集合のシステムとして定義してきた。そしてシステムの要素を有限集合にとどめるために、“生成”を方法としてきた。理論の定義がかなり込み入ったものになったのは、このためである。

実際、システムの要素となる集合を帰納的集合まで許し、“有限集合主義”から一步自由になることにすれば、各種プログラミングをおもてに出さずに済ませることができ、理論の定義はかなりシンプルになる。以下、この定義を示す。

4.2 理論の定義

理論とは、つぎのようなシステム

$$\mathcal{T} = (\mathcal{G}, \mathcal{A}, P)$$

のことである：

(1) \mathcal{G} はつぎのようなシステム (A, F) ：

(1-1) A は帰納的集合で、その要素は文字と呼ばれる。また、 A はアルファベットと呼ばれる。

文字の有限列（空な列を含む）を語と言い、語が n 個の文字でなるとき、その長さは n であると言う。

語の集合を A^* で表わす。

(1-2) F は、 A^* の帰納的な部分集合で、その要素は式 (formula) と呼ばれる。

(3) \mathcal{A} は、 F の帰納的な部分集合であり、その要素は公理と呼ばれる。

(4) P は、式に関する 2 項以上の関係を表わす帰納的述語の有限集合であり、その要素は推論規則 (rule of inference) と呼ばれる。

各推論規則 $P(W_1, W_2, \dots, W_n, V)$ は、

$$W_1, W_2, \dots, W_n \rightarrow V$$

のようにも書かれる。また、この推論規則に対しては、“ W_1, W_2, \dots, W_n から V が直接に結果する”という読み方をする。

4.3 証明

式の有限系列 W_1, W_2, \dots, W_n は、つぎの条

件を満たすとき、 \mathcal{T} における証明であると言う——また、各 W_i は証明の段階と言われる：

$1 \leq i \leq n$ である任意の i について、つぎのいずれかが成り立つ：

(1) W_i は \mathcal{T} の公理；

(2) i より小さい添字をもつ式の有限系列

$W_{i(1)}, W_{i(2)}, \dots, W_{i(k)}$ が存在して、

$$W_{i(1)}, W_{i(2)}, \dots, W_{i(k)} \rightarrow W_i$$

が \mathcal{T} の推論規則になる。

式 W に対して、それを最終の段階とする \mathcal{T} における証明が存在するとき、 W は \mathcal{T} における定理であると言う。また、 W は \mathcal{T} において証明可能 (provable) であると言われ、このときの証明を、 \mathcal{T} における W の証明と言う。

4.4 例——加法の理論

4.4.1 理論の定式化

加法の論理体系 $\mathcal{T} = (A, F, \mathcal{A}, P)$ が、以下のようにして定義される^(註)。

(1) $A = \{1, +, =\}$

(2) F は、つぎのようにして定義される式の全体である：

1° 1 は項である；

2° 項 U に対し、 $U1$ は項である；

3° 項 U, V に対し、 $U+V$ は項である；

4° 項 U, V に対し、 $U=V$ は式である；

5° 1° から 4° を有限回適用して導かれる式のみが、式である。

(3) \mathcal{A} ：

$$(a1) \quad 1 = 1$$

$$(a2) \quad U1 = U + 1$$

$$(a3) \quad U1 + V = U + V1$$

ここで、 U は項。

(4) P ：

$$(i1) \quad U = V \rightarrow U1 = V1$$

$$(i2) \quad U = V \rightarrow V = U$$

$$(i3) \quad U = V, V = W \rightarrow U = W$$

ここで、 U, V, W は項。

(2), (3), (4) に現われている記号 U, V, W は、

メタ記号で、“変数”として使用されている。即ち、 F , \mathcal{A} , P は、シェマで表現されている。

特に、 F , \mathcal{A} , P は無限集合である。但しそれは、帰納的という性格をもつ。即ち、

“この集合の要素である”

ことが、

“有限個の記号に対する実効的处理という形で生成できる”

ことに表現可能である。実際、§3.5.1.1 は、後者の仕方では加法理論を記述したものである。そして、この方法をとることで、無限集合を登場させずに理論を記述することができたのである。

(註) §3.5.1 参照。

4.4.2 証明の例

$11+111=11111$ は、つぎのように証明される：

- | | |
|-----------------|------|
| $1=1$ | (a1) |
| $11=11$ | (i1) |
| $111=111$ | (i1) |
| $1111=1111$ | (i1) |
| $11111=11111$ | (i1) |
| $11111=1111+1$ | (a2) |
| $1111+1=111+11$ | (a3) |
| $111+11=11+111$ | (a3) |
| $11111=111+11$ | (i3) |
| $11111=11+111$ | (i3) |
| $11+111=11111$ | (i2) |

5 理論の間の関係

5.1 理論の同型

二つの理論

$$\mathcal{T}_1 = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{U}_1, \hat{\mathcal{U}}_1, \mathcal{A}_1) \quad (\text{註})$$

$$(i=1, 2)$$

が同型であることを、つぎのように定義する。

即ち、テキスト変形システム

$$(\mathcal{G}^*_i, \mathcal{G}^*_i, \hat{\mathcal{U}}^*_i) \quad (i=1, 2)$$

の間の同型で、

(1) 文生成変形システム

$$(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i, \mathcal{U}_i) \quad (i=1, 2)$$

の間の同型を導き、かつ

(2) 公理 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の間の1対1対応を導くものがとれること。

(註) 理論 $(\mathcal{G}, \mathcal{U}, \mathcal{U}, \hat{\mathcal{U}}, \mathcal{A})$ において、 \mathcal{G} と \mathcal{U} は同値な文生成システムなので、 \mathcal{G} は最初から \mathcal{U} としてとられていると考えてよい。したがって、 $\mathcal{G}=\mathcal{U}$ として一般性を失わない。

5.2 理論の強弱

二つの理論 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ において、

(1) \mathcal{T}_1 から導かれる文変形システムおよびテキスト変形システムが、 \mathcal{T}_2 から導かれる文変形システムおよびテキスト変形システムよりもそれぞれ弱く、かつ

(2) \mathcal{T}_1 の公理が \mathcal{T}_2 の定理になる

とき、 \mathcal{T}_1 は \mathcal{T}_2 よりも弱い (\mathcal{T}_2 は \mathcal{T}_1 よりも強い) と言い、 $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ で表わす。

このとき、“ $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ かつ $\mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}_1$ ”は、理論の間の同値関係になるが、これを $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ と表わす。

5.3 理論の部分

二つの理論

$$\mathcal{T}_i = (\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i, \mathcal{U}_i, \hat{\mathcal{U}}_i, \mathcal{A}_i) \quad (i=1, 2)$$

において、

(1) 文生成変形システム $(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i, \mathcal{U}_i)$ ($i=1, 2$) に関して、

$$(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{U}_1) \subset (\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{U}_2)$$

(2) テキスト変形システム $(\mathcal{G}^*_1, \mathcal{G}^*_1, \hat{\mathcal{U}}^*_1)$ ($i=1, 2$) に関して、

$$(\mathcal{G}^*_1, \mathcal{G}^*_1, \hat{\mathcal{U}}^*_1) \subset (\mathcal{G}^*_2, \mathcal{G}^*_2, \hat{\mathcal{U}}^*_2)$$

(3) 公理 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ に関して、

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$$

が成り立っているとき、 \mathcal{T}_1 は \mathcal{T}_2 の部分であると言う。

5.4 “論理体系”

理論 \mathcal{T} が理論 \mathcal{T}' と同型な部分をもつとき、

“ \mathcal{T} は \mathcal{T}' を論理としてこれに従う理論である”

とすることにする。

この言い回しにおける“論理”が、“理論”の意味で“論理体系”の語を用いるときの“論理”に対応している。

理論を“論理体系”と見なすときの“論理”は、一意ではない。特に、理論 \mathcal{T} は、それ自身を論理としてこれに従う理論である。

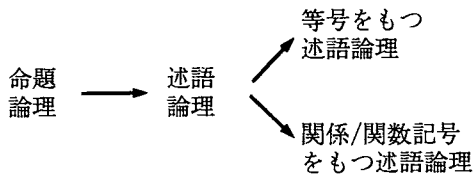
6 論理

6.1 理論としての論理

本節では、以下の“論理”を理論

$$\mathcal{T} = (\mathcal{G}, \mathcal{Q}, \mathcal{U}, \mathcal{R})$$

として定式化する (\rightarrow は拡張の方向を表わす) :



この定式化における \mathcal{D} の意味は、“換言規則”である。

6.2 命題論理

6.2.1 文生成システム

命題論理 \mathcal{T} は、以下のように定義される文生成システム $\mathcal{G} = (\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{T}\mathcal{V}, \mathcal{P}, \text{SEN})$ を土台とする。

- (1) $\mathcal{N}\mathcal{V} = \{\text{SEN}\}$
- (2) $\mathcal{T}\mathcal{V} = \{(\cdot), \wedge, \neg, \vee, \supset, \leftrightarrow\}$ (註1)
- (3) プロダクション \mathcal{P} は、

$$\begin{aligned} \text{SEN} &\rightarrow (\text{SEN}) \wedge (\text{SEN}) \\ \text{SEN} &\rightarrow (\text{SEN}) \vee (\text{SEN}) \\ \text{SEN} &\rightarrow (\text{SEN}) \rightarrow (\text{SEN}) \\ \text{SEN} &\rightarrow (\text{SEN}) \leftrightarrow (\text{SEN}) \\ \text{SEN} &\rightarrow \neg (\text{SEN}) \end{aligned}$$

でなる (註2)。

SEN が終端記号に変換されないので、命題論理は文 (終端記号のみからなる記号列) を生成しない。言い換えると、命題論理は 文をもたな

い。

(註1) これらは、命題論理の論理記号と呼ばれる。また、このうちの $\vee, \neg, \leftrightarrow$ は、本来、簡約記号として導入されるところのものである——この“簡約”の意味は、§6.2.2 で述べる文変形規則の (SR1), (SR2), (SR3) に示される。

‘ \neg ’ は“含意”の記号である。記号 ‘ \rightarrow ’ を使用するのがむしろ一般的であるが、文生成のプロダクションの記号 ‘ \rightarrow ’、文変形のプロダクションの記号 ‘ \rightarrow ’ と紛れないために、ここでは記号 ‘ \neg ’ を用いることにする。

(註2) これは、文を、つぎのように再帰的に定義することに対応する：

- (1) 文 ϕ, ψ に対し、 $\phi \wedge \psi$ は文；
- (2) 文 ϕ に対し、 $\neg \phi$ は文；

6.2.2 文変形システム

\mathcal{G} の上の文変形システム $\mathcal{U} = (\mathcal{S}, \mathcal{D})$ は、以下ようになる：

- (1) \mathcal{G} のシェマシステム $\mathcal{S} = (\overline{\mathcal{G}}, \sigma, \mathcal{R})$ では、
- (1-1) $\overline{\mathcal{G}} = (\mathcal{N}\overline{\mathcal{V}}, \mathcal{T}\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{P}}, \overline{\text{SEN}})$ は、

$\mathcal{N}\overline{\mathcal{V}}$:

$\overline{\text{SEN}}$: 文シェマ生成に関する

$\overline{\text{SVR}}$: 文記号生成に関する (註1)

$$\mathcal{T}\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{T}\mathcal{V} \cup \{\text{sen}, \text{sen}_1\}$$

$\overline{\mathcal{P}}$:

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{SEN}}) \wedge (\overline{\text{SEN}})$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{SEN}}) \vee (\overline{\text{SEN}})$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{SEN}}) \supset (\overline{\text{SEN}})$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{SEN}}) \leftrightarrow (\overline{\text{SEN}})$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow \neg (\overline{\text{SEN}})$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{SVR}})$$

$$\overline{\text{SVR}} \rightarrow \text{SVR}_1$$

$$\overline{\text{SVR}} \rightarrow \text{sen}$$

- (1-1) σ :

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow \text{SEN}$$

- (1-3) $\mathcal{R} = \phi$ 。

- (2) \mathcal{D} :

- (2-1) 変形補助記号は無し。

- (2-2) 文変形規則は、以下のもの (註2) :

- (C1) $\neg(\neg(\text{sen})) \rightleftharpoons \text{sen}$
 (C2) $\text{sen} \wedge \text{sen}_1 \rightarrow \text{sen}_1 \wedge \text{sen}$
 (C3) $\neg((\neg \text{sen}) \wedge (\neg \text{sen}_1)) \rightleftharpoons \text{sen} \vee \text{sen}_1$
 あるいは、同じこととして^(註3)、
 $\text{sen} \wedge \text{sen}_1 \rightleftharpoons \neg((\neg \text{sen}) \vee (\neg \text{sen}_1))$
 (C4) $\neg(\text{sen} \wedge \neg \text{sen}_1) \rightleftharpoons \text{sen} \supset \text{sen}_1$
 あるいは、同じこととして^(註4)、
 $\text{sen} \wedge \text{sen}_1 \rightleftharpoons \neg(\text{sen} \supset \neg \text{sen}_1)$
 $(\neg \text{sen}) \vee \text{sen}_1 \rightleftharpoons \text{sen} \supset \text{sen}_1$
 $\text{sen} \vee \text{sen}_1 \rightleftharpoons \neg \text{sen} \supset \text{sen}_1$
 (C5) $(\text{sen} \supset \text{sen}_1) \wedge (\text{sen}_1 \supset \text{sen})$
 $\rightleftharpoons \text{sen} \leftrightarrow \text{sen}_1$

(註1) $\overline{\text{SVR}}$ (Sentence-VaRiable) から、文記号
 $(\text{sen}), (\text{sen}_1), (\text{sen}_{11}), \dots$

が生成されることになる。

非終端記号SVRに関するプロダクションは、‘ ξ_{23} ’
 のように記号列を一つの変数として使用するわれわれ
 の通常の実践の定式化になっている。

このように記号列を変数として使えるようにする
 ときは、‘ ξ_{23} ’の‘ ξ_2 ’に対して代入が行なわれるよ
 うなことがないように、対処しなければならない。

これは、 TV に括弧：

(,)

を含ませ、生成されるシマ変数が括弧で括られた記
 号列になるようにすることで、処置できる。プロダク
 ションの

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{SVR}})$$

の括弧には、このような意味がある。(もちろん、シマ
 変数として記号列を用いないことにすれば、このよう
 な措置は必要ない。)

以下の記述では、煩瑣を避ける意味から、この措置
 のための括弧の表示は適宜省略する。

(註2) (C3) から (C5) までは、 \vee , \supset , \leftrightarrow を簡約
 記号として導入することに対応するもの。

(註3) (C₁) より、 $\neg(\neg \text{sen} \wedge \neg \text{sen}_1) \rightleftharpoons \text{sen} \vee \text{sen}_1$ の
 とき、 $\text{sen} \wedge \text{sen}_1 \rightleftharpoons \neg \neg(\neg \text{sen} \wedge \neg \text{sen}_1) \rightleftharpoons \neg(\neg \text{sen}$
 $\vee \neg \text{sen}_1)$ 。逆に、 $\text{sen} \wedge \text{sen}_1 \rightleftharpoons \neg(\neg \text{sen} \vee \neg \text{sen}_1)$ のとき、
 $\neg(\neg \text{sen} \wedge \neg \text{sen}_1) \rightleftharpoons \neg \neg(\neg \neg \text{sen} \vee \neg \neg \text{sen}_1) \rightleftharpoons \text{sen} \vee$
 sen_1 。

(註4) (C₁) による。

6.2.3 推論システム

$\mathcal{H} = (\mathcal{S}, \mathcal{B})$ は、つぎのようになる。

- (1) \mathcal{S} は、 $\mathcal{S}^* = (\overline{\mathcal{Q}}^*, \sigma^*, \mathcal{R})$ の $\overline{\mathcal{Q}}^*$ に対し、
 終端記号に

txt

を追加し、プロダクションに

$$\overline{\text{TXT}} \rightarrow \overline{\text{TXT}}_1$$

$$\overline{\text{TXT}} \rightarrow \text{txt}$$

を追加したもの。

- (2) \mathcal{B} では、

(2-1) テキスト変形補助記号は無し。

(2-2) テキスト変形規則は、“命題論理の公理”：

$$(S1) \varepsilon \rightarrow \text{sen} \supset (\text{sen}_1 \supset \text{sen})$$

$$(S2) \varepsilon \rightarrow (\text{sen} \supset (\text{sen}_1 \supset \text{sen}_{11}))$$

$$\supset ((\text{sen} \supset \text{sen}_1) \supset (\text{sen} \supset \text{sen}_{11}))$$

$$(S3) \varepsilon \rightarrow (\neg \text{sen}_1 \supset \neg \text{sen}) \supset (\text{sen} \supset \text{sen}_1)$$

と、“分離規則 (Modus Ponens)”：

(MP) “senと $\text{sen} \supset \text{sen}_1$ から sen_1 が導かれる”^(註)

と、そして \mathcal{B} が定める文変形規則から導かれ
 るもの。

(註) “senと $\text{sen} \supset \text{sen}_1$ から sen_1 が導かれる”は、簡約
 化した言い方であり、これをきちんと述べるならば、以
 下のようになる：

- (1) $\hat{\text{sen}} \hat{\text{txt}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{txt}}_1 /$
 $\rightarrow \hat{\text{sen}} \hat{\text{txt}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{txt}}_1 \hat{\text{sen}}_1 /$
 (2) $\hat{\text{sen}} \hat{\text{txt}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 /$
 $\rightarrow \hat{\text{sen}} \hat{\text{txt}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{sen}}_1 /$
 (3) $\hat{\text{sen}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{txt}} /$
 $\rightarrow \hat{\text{sen}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{txt}} \hat{\text{sen}}_1 /$
 (4) $\hat{\text{sen}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 /$
 $\rightarrow \hat{\text{sen}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{sen}}_1 /$
 (5) $/\text{sen} \hat{\text{txt}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{txt}}_1 /$
 $\rightarrow / \text{sen} \hat{\text{txt}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{txt}}_1 \hat{\text{sen}}_1 /$
 (6) $/\text{sen} \hat{\text{txt}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 /$
 $\rightarrow / \text{sen} \hat{\text{txt}} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{sen}}_1 /$
 (7) $/\text{sen} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{txt}}_1 /$
 $\rightarrow / \text{sen} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{txt}}_1 \hat{\text{sen}}_1 /$
 (8) $/\text{sen} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 /$
 $\rightarrow / \text{sen} \hat{\text{sen}} \supset \text{sen}_1 \hat{\text{sen}}_1 /$

ここで、/は、テキストの端を表わすメタ記号。

6.3 述語論理

6.3.1 “一般化規則”の排除

6.3.1.1 “一般化規則”の所在

一つのシエマ s に対し、 s が定理シエマ (§ 6.8)であることを示す証明は、超越論的である。実際、この証明は、《 s をシエマとする全ての文は定理》という結論に現われる“全て”という語を扱わねばならない。これは超越論である。

そこで、“全て”の語を扱うこの証明において、われわれは超越論的な規則を用いていることになる。

例えば、 $\text{sen} \supset \text{sen}$ が定理シエマであることを示すのに、メタ記号 φ を導入し、つぎのような論法を用いる：

“文 φ に対し、テキスト変形規則（“推論規則”）から、……のようにして $\varphi \supset \varphi$ が導かれる。したがって $\varphi \supset \varphi$ は定理。 φ は任意だから $\text{sen} \supset \text{sen}$ は定理シエマ。”

そして最後を締めくくっていることは：

“ φ は任意だから $\text{sen} \supset \text{sen}$ は定理シエマ。”

は、所謂“一般化規則”：

$$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi}$$

のメタ的適用ということになる。

このメタ証明は、 $(\forall \text{sen})(\text{sen} \supset \text{sen})$ を定理シエマとして確立しようとするメタ証明とは、区別される。実際、後者の証明は、

“文変項 φ に対し、テキスト変形規則（“推論規則”）から、……のようにして $\varphi \supset \varphi$ が導かれる。したがって $\varphi \supset \varphi$ は定理。よって、 $\varphi \supset \varphi$ から一般化規則によって導かれる $(\forall \varphi)(\varphi \supset \varphi)$ も定理。 φ は任意だから $(\forall \text{sen})(\text{sen} \supset \text{sen})$ は定理シエマ。”

そして、この証明の中の“一般化規則”は推論規則であり、先頭の全称記号がシエマ全体を束縛している形のシエマを定理シエマとして証明する場合には、必須の推論規則となる。

しかし、先頭の全称記号がシエマ全体を束縛している形の定理シエマは、“実効性”の観点で言えば、先頭の全称記号を除いた定理シエマと変わらない。この全称記号は、過剰なのである。しかもつぎに述べるように、“一般化規則”の措定は、“演繹定理”と両立できないという難点が伴う。

そこでわれわれは、述語論理から“一般化規則”を排除することにする。

6.3.1.2 一般化規則と演繹定理との非両立性

われわれは、定理の導出——結果から見ると、定理の証明——を、テキスト生成と捉え、このときの規則を“推論規則”と見なした。このような推論規則は、テキスト

$$\varphi \wedge \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \wedge \psi$$

$$(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_n, \psi \text{ は句})$$

が生成されるという事実から $\varphi \supset \psi$ を結論するものでなければならない。実際これが“演繹定理”というメタ(超越論的)定理で述べられていることである。そしてこのとき、一般化規則

$$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi}$$

は、 $\varphi \supset (\forall x)\varphi$ を定理と定めるものでなければならない。

しかしこれは通用しない——この意味で、“一般化定理”は“演繹定理”と両立しない。

例えば、文 φ と変項 x に対し、つぎの推論が可能になって $(\exists x)\varphi \supset \varphi$ が定理になってしまう(特に、 $(\exists x)\varphi \supset (\forall x)\varphi$ が定理となる)：

$$\begin{array}{c} (\exists x)\varphi \\ \hline \neg \neg (\exists x)\varphi \\ \hline \neg \neg (\exists x)(\neg \neg \varphi) \quad \neg \varphi \supset (\forall x)(\neg \varphi) (*) \\ \hline \neg (\forall x)(\neg \varphi) \quad \neg (\forall x)(\neg \varphi) \supset \neg \neg \varphi \\ \hline \neg \neg \varphi \\ \hline \varphi \end{array}$$

(*)：一般化規則に演繹定理を適用して得られる定理

なお、われわれは $\text{sen} \neq \neg \neg \text{sen}$ を変形規則の筆

頭に位置付ける。

6.3.2 文生成システム

述語論理 \mathcal{P} は、以下のように定義される文生成システム $\mathcal{G} = ({}^N\mathcal{V}, {}^T\mathcal{V}, P, \text{SEN})$ を土台とする。

- (1) ${}^N\mathcal{V}$ は、命題論理の ${}^N\mathcal{V}$ に、
 $\text{TVR}^{(\text{註1})}$: 変項生成に関する
 TRM : 項生成に関する
 を追加したもの。
- (2) ${}^T\mathcal{V}$ は、命題論理の ${}^T\mathcal{V}$ に、論理記号 \forall
 を追加したもの。

- (3) P は、命題論理の P に、
 $\text{SEN} \rightarrow (\forall (\text{TVR})) (\text{SEN})$
 $\text{TRM} \rightarrow \text{TVR}$
 を追加したもの^(註2)。

命題論理が文をもたないので、述語論理も文をもたない。

(註1) TVR は、“Term-VaRiable”。

(註2) これは、文を、つぎのように再帰的に定義することに対応する：

- (1) 命題論理の文は、文；
- (2) 変項 x と命題論理の文 ϕ に対し、 $(\forall x)\phi$ は文；
- (3) 上の(1)、(2)の適用で生成されるもののみが、文。

6.3.3 自由変項，束縛変項

一つの文の中の二つの括弧：

$a = ' ('$ と、その右方向にある $b = ') '$ が互いに対応するということを、つぎのように定義する。

a と b を両端とする記号列の中に現われる全ての括弧 (a と b を含む) に対して、 a から b へ番号 $0, 1, 2, \dots$ を順にふる。番号全体の集合を M とし、関数

$$p : M \longrightarrow \{1, -1\}$$

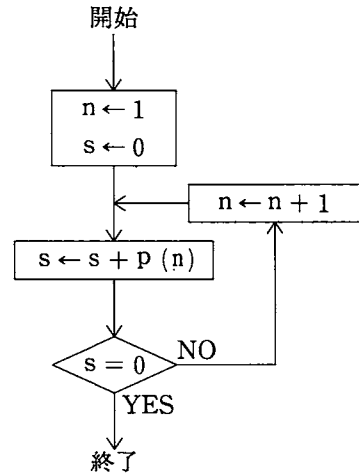
をつぎのように定義する：

$$p(n) = \begin{cases} 1 & (\text{番号 } n \text{ の括弧が } ' (' \text{ のとき}) \\ -1 & (\text{番号 } n \text{ の括弧が } ') ' \text{ のとき}) \end{cases}$$

そして、 a と b が互いに対応する括弧であるということを、つぎのプログラムが

$s = (b \text{ の番号})$

の状態を終了することと定義する：



変項 x は、 \forall と連結しているか、あるいは条件：

- (1) それの左方向に記号列 ' $(\forall x)$ ' がある；
 - (2) この記号列の右隣りにある括弧 ' $'$ (に対応する ' $)$ ' は、 x の右方向にある
- を満たすとき、束縛変項であると言う——そうでないときは、自由変項であると言う。

6.3.4 “式”，“文”

われわれは、文生成システム \mathcal{G} が生成する文を“式”と呼び、“文”の語は、“自由変項を含まない式”を指すものと約束する。——尤も、述語論理は式 (特に、文) をもたないが。

6.3.5 文変形システム

\mathcal{G} の上の文変形システム $\mathcal{U} = (S, \mathcal{D})$ は、以下になる：

(I) \mathcal{G} のシエマシステム $S = (\overline{\mathcal{G}}, \sigma, \mathcal{R})$ では、

(1) $\overline{\mathcal{G}} = ({}^N\overline{\mathcal{V}}, {}^T\overline{\mathcal{V}}, \overline{P}, \overline{\text{SEN}})$ は、

(1-1) ${}^N\overline{\mathcal{V}}$ は、命題論理の ${}^N\mathcal{V}$ に

$\overline{\text{TVR}}$: 変項シエマ記号の生成に関する

$\overline{\text{TRM}}$: 項シエマ記号の生成に関する

を追加したもの。

(2-2) ${}^T\overline{\mathcal{V}}$ は、命題論理の ${}^T\mathcal{V}$ に

tvr : 原初変項シエマ記号

trm : 原初項シエマ記号

[,] : 括弧

↓ : 代入記号

nf

を追加したもの。

(2-3) \overline{P} は、命題論理の \overline{P} に、

式、項の生成^(註1)

$$\overline{SEN} \rightarrow (\overline{SEN}) [(\overline{TVR}) \downarrow (\overline{TRM})]$$

$$\overline{SEN} \rightarrow \text{nf} [(\overline{TVR})]$$

$$\overline{TRM} \rightarrow (\overline{TRM}) [(\overline{TVR}) \downarrow (\overline{TRM})]$$

変項シェマ記号の生成^(註2)

$$\overline{TRM} \rightarrow (\overline{TVR})$$

$$\overline{TVR} \rightarrow \text{TVR}_i$$

$$\overline{TVR} \rightarrow \text{tvr}$$

項シェマ記号の生成^(註3)

$$\overline{TRM} \rightarrow \overline{TRM}_i$$

$$\overline{TRM} \rightarrow \text{trm}$$

を追加したもの。

(2) シェマ関数 σ は、命題論理の σ に

$$\overline{TRM} \rightarrow \text{TRM}$$

を追加したもの

(3) 代入規則 \mathcal{R} は、以下のもの：

(3-1) 代入枠が

$$\overline{SEN} \Rightarrow \overline{s}, \overline{TVR} \Rightarrow \overline{x}, \overline{TRM} \Rightarrow \overline{t},$$

$$\text{SEN} \Rightarrow s, \text{TVR} \Rightarrow x, \text{TRM} \Rightarrow t$$

に対する

$$\{(\overline{s}, s), (\overline{x}, x), (\overline{t}, t), \dots\}$$

であるとき、 $(s[\overline{x} \downarrow \overline{t}])$ には、 s の中の自由な x に t を直接代入することで s から得られる記号列 (式) を、直接代入する。

(3-2) 代入枠が

$$\overline{TRM} \Rightarrow \overline{s}, \overline{TVR} \Rightarrow \overline{x}, \overline{TRM} \Rightarrow \overline{t},$$

$$\text{TRM} \Rightarrow s, \text{TVR} \Rightarrow x, \text{TRM} \Rightarrow t$$

に対する

$$\{(\overline{s}, s), (\overline{x}, x), (\overline{t}, t), \dots\}$$

であるとき、 $(s[\overline{x} \downarrow \overline{t}])$ には、 s の中の x に t を直接代入することで s から得られる記号列 (項) を、直接代入する。

(3-3) 代入枠が

$$\overline{TVR} \Rightarrow \overline{x}, \overline{TVR} \Rightarrow x,$$

$$\text{SEN} \Rightarrow \text{nf} [\overline{x}], \text{SEN} \Rightarrow s$$

に対する

$$\{(\overline{x}, x), (\text{nf} [\overline{x}], s), \dots\}$$

であるとき、 $(\text{nf} [\overline{x}])$ には、

(i) s が x を自由変項として含まないときは、 s 自身；

(ii) s が x を自由変項として含むときは、 $(\forall x)s$

を直接代入する^(註4)。

(3-4) 代入枠が $\overline{TVR} \Rightarrow \overline{x}$, $\text{TVR} \Rightarrow x$ に対する

$$\{(\overline{x}, x), \dots\}$$

であるとき、右に \downarrow のない \overline{x} には、 x を直接代入する。

(3-5) 代入枠が $\overline{TRM} \Rightarrow \overline{t}$, $\text{TRM} \Rightarrow t$ に対する

$$\{(\overline{t}, t), \dots\}$$

であるとき、左に \downarrow のない \overline{t} には、 t を直接代入する。

(II) \mathcal{D} は、命題論理の \mathcal{D} に同じ。

(註1) この意味は、次節で明らかになる。

(註2) したがって、

$$(\text{tvr}), (\text{tvr}_i), (\text{tvr}_{i1}), \dots$$

が、変項シェマ記号の全て。

(註3) したがって、

$$\text{trm}, \text{trm}_i, \text{trm}_{i1}, \dots$$

が、項シェマ記号の全て。

(註4) ‘nf’は、‘not free’の‘n’、‘f’をとったもの。代入枠 $\{(\overline{x}, x), (\text{nf} [\overline{x}], s), \dots\}$ の下で $\text{nf} [\overline{x}]$ に代入されるのは、文 s に対して $\langle s \rangle$ が変項 x を自由変項として含むときは、これを $(\forall x)$ で束縛する」という処置を施して得られる文である。この文において x は自由変項でない。

6.3.6 推論システム

$\mathcal{U} = (\mathcal{S}, \mathcal{D})$ は、つぎようになる。

(1) \mathcal{S} は、 $\mathcal{S}^* = (\overline{\mathcal{Q}}^*, \sigma^*, \mathcal{R}^*)$ の $\overline{\mathcal{Q}}^*$ を、 $\overline{\mathcal{Q}}^*$ と命題論理の $\overline{\mathcal{Q}}^*$ の合併に改めたもの。

(2) \mathcal{D} は、命題論理の \mathcal{D} に、文変形規則から導かれるテキスト変形規則と、

$$(Q0) \varepsilon \rightarrow \text{sen} \supset \text{sen} [\text{tvr} \downarrow \text{trm}]$$

$$(Q1) \varepsilon \rightarrow (\forall (\text{tvr})) (\text{sen})$$

$$\supset (\text{sen}) [(\text{tvr}) \downarrow (\text{trm})]$$

$$(Q2) \varepsilon \rightarrow (\forall (\text{tvr})) ((\text{nf} [\text{tvr}]) \supset (\text{sen}))$$

$$\supset ((\text{nf} [\text{tvr}]) \supset (\forall (\text{tvr})) (\text{sen}))$$

$$(Q3) \varepsilon \rightarrow \text{nf} [\text{tvr}] \supset (\forall \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}]$$

(Q4) $\varepsilon \rightarrow (\text{sen} \supset \text{sen}_1)$
 $\supset ((\forall \text{tvr}) \text{sen} \supset (\forall \text{tvr}) \text{sen}_1)$
 を追加したもの^(註)。

(註) (Q1), (Q2) は, 所謂“限量子公理 (quantifier axiom)”。(Q0), (Q3), (Q4) は, “一般化規則”を排除したために必要となった。

6.3.7 簡約記号 \exists の導入

簡約記号 \exists を, つぎの手続きで導入する:

(1) \mathcal{G} と $\mathcal{H} = (\mathcal{S}, \mathcal{D})$ を, 以下のように変更する:

(1-1) ${}^T V$ に記号 \exists を追加する。

(1-2) P につぎの規則を追加する:

$$\text{SEN} \rightarrow (\exists \text{TVR}) (\text{SEN})$$

(1-3) 上の変更に, $\mathcal{S} = (\overline{\mathcal{G}}, \sigma, \mathcal{R})$ の変更を対応させる。

(1-4) \mathcal{D} につぎの規則を追加する:

$$(C6) \quad \neg((\forall \text{tvr})(\neg \text{sen})) \rightleftharpoons (\exists \text{tvr}) \text{sen}$$

あるいは同じこととして,

$$\neg((\exists \text{tvr})(\neg \text{sen})) \rightleftharpoons (\forall \text{tvr}) \text{sen}$$

(2) (1)の変更に, $\mathcal{H} = (\mathcal{S}, \mathcal{D})$ の変更を対応させる。

記号 \forall に関するテキスト変形規則(Q1), (Q2)は, 記号 \exists に対してはつぎのようになる^(註):

$$(Q1) \quad \varepsilon \rightarrow \text{sen} [\text{tvr} \downarrow \text{trm}] \supset (\exists \text{tvr}) \text{sen}$$

$$(Q2) \quad \varepsilon \rightarrow \text{nf} [\text{tvr}] \wedge (\exists \text{tvr}) \text{sen} \\ \supset (\exists \text{tvr}) (\text{nf} [\text{tvr}] \wedge \text{sen})$$

$$(Q3) \quad \varepsilon \rightarrow (\exists \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}] \supset \text{nf} [\text{tvr}]$$

$$(Q4) \quad \varepsilon \rightarrow (\text{sen} \supset \text{sen}_1) \\ \supset ((\exists \text{tvr}) \text{sen} \supset (\exists \text{tvr}) \text{sen}_1))$$

(註) (Q1), (Q2), (Q3), (Q4) (§6.3.6)の \rightarrow の右辺を, 以下のように順次変形する:

(Q1):

$$(\forall \text{tvr}) \text{sen} \supset \text{sen} [\text{tvr} \downarrow \text{trm}] \\ \neg(\text{sen} [\text{tvr} \downarrow \text{trm}]) \supset \neg((\forall \text{tvr}) \text{sen}) \\ (\neg \text{sen}) [\text{tvr} \downarrow \text{trm}] \supset \neg((\forall \text{tvr})(\neg \neg \text{sen})) \\ \text{sen} [\text{tvr} \downarrow \text{trm}] \supset \neg((\forall \text{tvr})(\neg \text{sen})) \\ \text{sen} [\text{tvr} \downarrow \text{trm}] \supset (\exists \text{tvr}) \text{sen}$$

(Q2):

$$(\forall \text{tvr}) (\text{nf} [\text{tvr}] \supset \text{sen})$$

$$\supset (\text{nf} [\text{tvr}] \supset (\forall \text{tvr}) \text{sen}) \\ \neg(\text{nf} [\text{tvr}] \supset (\forall \text{tvr}) \text{sen}) \\ \supset \neg((\forall \text{tvr})(\text{nf} [\text{tvr}] \supset \text{sen})) \\ \text{nf} [\text{tvr}] \wedge ((\forall \text{tvr}) \text{sen}) \\ \supset \neg((\forall \text{tvr})(\neg \neg(\text{nf} [\text{tvr}] \supset \text{sen}))) \\ \text{nf} [\text{tvr}] \wedge \neg((\forall \text{tvr})(\neg \neg \text{sen})) \\ \supset \neg((\forall \text{tvr})(\neg(\text{nf} [\text{tvr}] \wedge \neg \text{sen}))) \\ \text{nf} [\text{tvr}] \wedge \neg((\forall \text{tvr})(\neg \text{sen})) \\ \supset \neg((\forall \text{tvr})(\neg(\text{nf} [\text{tvr}] \wedge \text{sen}))) \\ \text{nf} [\text{tvr}] \wedge (\exists \text{tvr}) \text{sen} \\ \supset (\exists \text{tvr})(\text{nf} [\text{tvr}] \wedge \text{sen})$$

(Q3):

$$\text{nf} [\text{tvr}] \supset (\forall \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}] \\ \neg(\forall \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}] \supset \neg \text{nf} [\text{tvr}] \\ (\exists \text{tvr}) \neg \text{nf} [\text{tvr}] \supset \neg \text{nf} [\text{tvr}] \\ (\exists \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}] \supset \text{nf} [\text{tvr}]$$

(Q4):

$$(\text{sen} \supset \text{sen}_1) \supset ((\forall \text{tvr}) \text{sen} \supset (\forall \text{tvr}) \text{sen}_1) \\ (\neg \text{sen}_1 \supset \neg \text{sen}) \\ \supset (\neg(\forall \text{tvr}) \text{sen}_1 \supset \neg(\forall \text{tvr}) \text{sen}) \\ (\neg \text{sen}_1 \supset \neg \text{sen}) \\ \supset ((\exists \text{tvr}) \neg \text{sen}_1 \supset (\exists \text{tvr}) \neg \text{sen}) \\ (\text{sen} \supset \text{sen}_1) \\ \supset ((\exists \text{tvr}) \text{sen} \supset (\exists \text{tvr}) \text{sen}_1)$$

6.4 等号をもつ述語論理

述語論理を, 等号の付加によって拡張する。この拡張された述語論理を, “等号をもつ述語論理”と呼ぶことにする。

6.4.1 文生成システム

述語論理の土台となる文生成システム $\mathcal{G} = ({}^N V, {}^T V, P, \text{SEN})$ を, 以下のように変更する:

(1) ${}^T V$ に, 等号

=

を追加する。

(2) P に,

$$\text{SEN} \rightarrow (\text{TRM}) = (\text{TRM})$$

を追加する。

6.4.2 文/テキスト変形システム

g の上の文変形システム $\mathcal{U} = (\mathcal{S}, \mathcal{D})$ を、以下のように変更する：

(I) g のシエマシステム $\mathcal{S} = (\mathcal{G}, \sigma, \mathcal{R})$ に対し、

(1) $\overline{g} = (\overline{N\bar{V}}, \overline{TV}, \overline{P}, \overline{SEN})$ では、

(1-1) \overline{TV} に

=

を追加する。

(1-2) \overline{P} に、

$$\overline{SEN} \rightarrow \overline{(TRM)} = \overline{(TRM)}$$

を追加する

(II) \mathcal{D} は、述語論理の \mathcal{D} に、つぎの等号の規則を追加する：

$$(E1) \quad (trm = trm_1) \rightarrow (trm_1 = trm)$$

(III) $\mathcal{U} = (\mathcal{S}, \mathcal{D})$ では、

(3-1) \mathcal{S} の変更に対応して \mathcal{S} を変更する。

(3-2) 述語論理の \mathcal{D} に、 \mathcal{D} から導かれる変形規則の他に、等号の規則：

$$(E2) \quad \varepsilon \rightarrow trm = trm$$

$$(E3) \quad "trm = trm_1 \text{ と } trm_1 = trm_2 \text{ から } trm = trm_2 \text{ が導かれる}"$$

を追加する。

6.5 関係/関数記号をもつ述語論理

この節では、述語論理に関係/関数記号を付加して拡張する方法を示す。

6.5.1 文生成システム

述語論理の土台となる文生成システム $g = (\overline{N\bar{V}}, \overline{TV}, \overline{P}, \overline{SEN})$ を、以下のように変更する：

(1) $\overline{N\bar{V}}$ に

$REL^{(註1)}$ ：関係生成に関する

$FUN^{(註2)}$ ：関数生成に関する

を追加する。

(2) \overline{TV} に、記号

\langle, \rangle

を追加する。

(3) \overline{P} に、

$$SEN \rightarrow \langle TVR \rangle (SEN) [TRM]$$

$$SEN \rightarrow REL$$

$$REL \rightarrow \langle TVR \rangle (SEN) []$$

$$TRM \rightarrow \langle TVR \rangle (TRM) [TRM]$$

TRM \rightarrow FUN

FUN $\rightarrow \langle TVR \rangle (TRM) []$

を追加する。

このとき、

(1) 変項 x_1, \dots, x_n

(2) $t_1 = \dots = t_n = \varepsilon$

(3) 式 φ , 項 τ

に対し、

$$\langle x_n \rangle (\dots (\langle x_1 \rangle (\varphi) [t_1]) \dots) [t_n]$$

$$\langle x_n \rangle (\dots (\langle x_1 \rangle (\tau) [t_1]) \dots) [t_n]$$

は、それぞれ式と項であるが、この形^(註3)の式、項を、それぞれ“関係”、“関数”と呼ぶ。

x_i はこの関係および関数の変数であると言う。

変数の個数が k である関係、関数を、それぞれ、 k 項関係、 k 変数関数と呼ぶ。

(註1) REL は、“RELation”。

(註2) FUN は、“FUNction”。

(註3) ここでは、通常の表記の ' $f(x)$ ' を ' $\langle x \rangle (f)$ ' に改め、 $f(x)$ の x に t を代入した ' $f(t)$ ' を ' $\langle x \rangle (f) [t]$ ' に改めている。式の生成規則を簡単にするために、このような形を敢えて選ぶことにする。

6.5.2 文/テキスト変形システム

g の上の文変形システム $\mathcal{U} = (\mathcal{S}, \mathcal{D})$ を、以下のように変更する：

(I) g のシエマシステム $\mathcal{S} = (\mathcal{G}, \sigma, \mathcal{R})$ に対し、

(1) $\overline{g} = (\overline{N\bar{V}}, \overline{TV}, \overline{P}, \overline{SEN})$ では、

(1-1) $\overline{N\bar{V}}$ に

REL ：関係シエマ記号生成に関する

FUN ：関数シエマ記号生成に関する

を追加する。

(1-2) \overline{TV} に、 \langle, \rangle と

rel：原初関係シエマ記号

fun：原初関数シエマ記号

を追加する。

(1-3) \overline{P} に、

$$\overline{SEN} \rightarrow \langle TVR \rangle (\overline{SEN}) [\overline{TRM}]$$

$$\overline{SEN} \rightarrow REL$$

$$REL \rightarrow \langle TVR \rangle (\overline{SEN}) []$$

$$\overline{\text{TRM}} \rightarrow \langle \overline{\text{TVR}} \rangle (\overline{\text{TRM}}) [\overline{\text{TRM}}]$$

$$\overline{\text{TRM}} \rightarrow \overline{\text{FUN}}$$

$$\overline{\text{FUN}} \rightarrow \langle \overline{\text{TVR}} \rangle (\overline{\text{TRM}}) []$$

を追加する

(2) シェマ関数 σ に

$$\overline{\text{REL}} \rightarrow \text{REL}$$

$$\overline{\text{FUN}} \rightarrow \text{FUN}$$

を追加する

(3) 代入規則 \mathcal{R} に、つぎのものを追加する：

(3-1) 代入枠が $\overline{\text{TVR}} \rightleftharpoons \bar{x}$, $\text{TVR} \rightleftharpoons x$ に対する

$$\{(\bar{x}, x), \dots\}$$

であるとき、 $\langle \bar{x} \rangle$ には $\langle x \rangle$ を直接代入する。

(3-2) 代入枠が $\overline{\text{TRM}} \rightleftharpoons \bar{t}$, $\text{TRM} \rightleftharpoons t$ に対する

$$\{(\bar{t}, t), \dots\}$$

であるとき、 $[\bar{t}]$ には $[t]$ を直接代入する。

(II) \mathcal{D} に、“関係および関数における変項への定項の代入”を導入する規則：

(R1) $\langle \text{tvr} \rangle (\text{sen}) [\text{trm}] \rightarrow (\text{sen}) [\text{tvr} \downarrow \text{trm}]$

(R2) $\langle \text{tvr} \rangle (\text{trm}) [\text{trm}] \rightarrow (\text{trm}) [\text{tvr} \downarrow \text{trm}]$

を追加する。

(III) \mathcal{U} の変更に対応して、 $\hat{\mathcal{U}} = (\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{D}})$ を変更する。

6.6 等号をもつ述語論理の構成一覧

ここで、等号をもつ述語論理

$$\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{R}, \mathcal{U}, \hat{\mathcal{U}})$$

の構成一覧を示しておく。

(I) 文生成システム $\mathcal{G} = (\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{T}\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{S})$ ：

(1-1) $\mathcal{N}\mathcal{V}$ ：

SEN：文生成に関する

TVR：変項生成に関する

TRM：項生成に関する

(1-2) $\mathcal{T}\mathcal{V} = \{(\ , \), \wedge, \neg,$

$$\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$$

(1-3) \mathcal{P} ：

$$\text{SEN} \rightarrow (\text{SEN}) \wedge (\text{SEN})$$

$$\text{SEN} \rightarrow \neg (\text{SEN})$$

$$\text{SEN} \rightarrow (\text{SEN}) \vee (\text{SEN})$$

$$\text{SEN} \rightarrow (\text{SEN}) \rightarrow (\text{SEN})$$

$$\text{SEN} \rightarrow (\text{SEN}) \leftrightarrow (\text{SEN})$$

$$\text{SEN} \rightarrow (\forall (\text{TVR})) (\text{SEN})$$

$$\text{SEN} \rightarrow (\exists (\text{TVR})) (\text{SEN})$$

$$\text{SEN} \rightarrow (\text{TRM}) = (\text{TRM})$$

$$\text{TRM} \rightarrow \text{TVR}$$

(II) $\mathcal{U} = ((\mathcal{G}, \sigma, \mathcal{R}), \mathcal{D})$ ：

(2-1) $\overline{\mathcal{G}} = (\mathcal{N}\overline{\mathcal{V}}, \mathcal{T}\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{P}}, \overline{\text{SEN}})$ ：

$$\mathcal{N}\overline{\mathcal{V}} = \{\overline{\text{SEN}}, \overline{\text{SVR}}, \overline{\text{TVR}}, \overline{\text{TRM}}, \overline{\text{REL}}, \overline{\text{FUN}}\}$$

$$\mathcal{T}\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{T}\mathcal{V} \cup$$

$$\{\text{sen}, \text{svr}, \text{tvr}, \text{trm}, [\ , \], \downarrow, \text{nf}, =\}$$

$\overline{\mathcal{P}}$ ：

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{SEN}}) \wedge (\overline{\text{SEN}})$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow \neg (\overline{\text{SEN}})$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{SVR}})$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{SEN}}) [(\overline{\text{TVR}}) \downarrow (\overline{\text{TRM}})]$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow \text{nf} [(\overline{\text{TVR}})]$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{TRM}}) = (\overline{\text{TRM}})$$

$$\overline{\text{SVR}} \rightarrow \overline{\text{SVR}}_1$$

$$\overline{\text{SVR}} \rightarrow \text{sen}$$

$$\overline{\text{TRM}} \rightarrow (\overline{\text{TRM}}) [(\overline{\text{TVR}}) \downarrow (\overline{\text{TRM}})]$$

$$\overline{\text{TRM}} \rightarrow (\overline{\text{TVR}})$$

$$\overline{\text{TRM}} \rightarrow \overline{\text{TRM}}_1$$

$$\overline{\text{TRM}} \rightarrow \text{trm}$$

$$\overline{\text{TVR}} \rightarrow \overline{\text{TVR}}_1$$

$$\overline{\text{TVR}} \rightarrow \text{tvr}$$

(2-2) σ ：

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow \text{SEN}$$

$$\overline{\text{TRM}} \rightarrow \text{TRM}$$

(2-3) \mathcal{R} (“代入規則”)：

(2-3-1) 代入枠が

$$\overline{\text{SEN}} \rightleftharpoons \bar{s}, \overline{\text{TVR}} \rightleftharpoons \bar{x}, \overline{\text{TRM}} \rightleftharpoons \bar{t},$$

$$\text{SEN} \rightleftharpoons s, \text{TVR} \rightleftharpoons x, \text{TRM} \rightleftharpoons t$$

に対する

$$\{(\bar{s}, s), (\bar{x}, x), (\bar{t}, t), \dots\}$$

であるとき、 $(s [\bar{x} \downarrow \bar{t}])$ には、 s 中の自由な x に t を直接代入することで s から得られる記号列 (式) を、直接代入する。

(2-3-2) 代入枠が

$$\overline{\text{TRM}} \rightleftharpoons \bar{s}, \overline{\text{TVR}} \rightleftharpoons \bar{x}, \overline{\text{TRM}} \rightleftharpoons \bar{t},$$

$$\text{TRM} \rightleftharpoons s, \text{TVR} \rightleftharpoons x, \text{TRM} \rightleftharpoons t$$

に対する

$$\{(\bar{s}, s), (\bar{x}, x), (\bar{t}, t), \dots\}$$

であるとき、 $(s [\bar{x} \downarrow \bar{t}])$ には、 s 中の x

に t を直接代入することで s から得られる
記号列 (項) を, 直接代入する。

(2-3-3) 代入棒が

$$\overline{\text{TVR}} \Rightarrow \bar{x}, \text{TVR} \Rightarrow x, \\ \text{SEN} \Rightarrow \text{nf } [\bar{x}], \text{SEN} \Rightarrow s$$

に対する

$$\{(\bar{x}, x), (\text{nf } [\bar{x}], s), \dots\}$$

であるとき, $(\text{nf } [\bar{x}])$ には,

(i) s が x を自由変項として含まないときは,
 s 自身;

(ii) s が x を自由変項として含むときは,
 $(\forall x)s$

を直接代入する。

(2-3-4) 代入棒が $\overline{\text{TVR}} \Rightarrow \bar{x}$, $\text{TVR} \Rightarrow x$ に対する
 $\{(\bar{x}, x), \dots\}$

であるとき, 右に ↓ のない \bar{x} には, x を直接
代入する。

(2-3-5) 代入棒が $\overline{\text{TRM}} \Rightarrow \bar{t}$, $\text{TRM} \Rightarrow t$ に対する
 $\{(\bar{t}, t), \dots\}$

であるとき, 左に ↓ のない \bar{t} には, t を直
接代入する。

(2-4) \mathcal{D} (“換言規則”) :

文変形補助記号は無し。

文変形規則は,

$$(C1) \neg(\neg(\text{sen})) \Leftrightarrow \text{sen}$$

$$(C2) \text{sen} \wedge \text{sen}_1 \rightarrow \text{sen}_1 \wedge \text{sen}$$

$$(C3) \neg((\neg \text{sen}) \wedge (\neg \text{sen}_1)) \Leftrightarrow \text{sen} \vee \text{sen}_1$$

あるいは, 同じこととして,

$$\text{sen} \wedge \text{sen}_1 \Leftrightarrow \neg((\neg \text{sen}) \vee (\neg \text{sen}_1))$$

$$(C4) \neg(\text{sen} \wedge (\neg \text{sen}_1)) \Leftrightarrow \text{sen} \supset \text{sen}_1$$

あるいは, 同じこととして,

$$\text{sen} \wedge \text{sen}_1 \Leftrightarrow \neg(\text{sen} \supset \neg \text{sen}_1)$$

$$(\neg \text{sen}) \vee \text{sen}_1 \Leftrightarrow \text{sen} \supset \text{sen}_1$$

$$\text{sen} \vee \text{sen}_1 \Leftrightarrow \neg \text{sen} \supset \text{sen}_1$$

$$(C5) (\text{sen} \supset \text{sen}_1) \wedge (\text{sen}_1 \supset \text{sen})$$

$$\Leftrightarrow \text{sen} \leftrightarrow \text{sen}_1$$

$$(C6) \neg((\forall \text{tvr})(\neg \text{sen})) \Leftrightarrow (\exists \text{tvr}) \text{sen}$$

$$\neg((\exists \text{tvr})(\neg \text{sen})) \Leftrightarrow (\forall \text{tvr}) \text{sen}$$

$$(E_1) (\text{trm} = \text{trm}_1) \rightarrow (\text{trm}_1 = \text{trm})$$

Ⅲ $\hat{u} = ((\hat{g}, \sigma, \mathcal{R}), \hat{v})$:

(3-1) \hat{g} :

\hat{g}^* の終端記号に

txt

を追加し, プロダクションに

$$\overline{\text{TXT}} \rightarrow \overline{\text{TXT}}, \\ \overline{\text{TXT}} \rightarrow \text{txt}$$

を追加。

(3-2) \hat{v} :

テキスト変形補助記号は無し。

テキスト変形規則は, 文変形規則から導かれ
るテキスト変形規則の他に,

(MP) “sen と $\text{sen} \supset \text{sen}_1$ から sen_1 が導かれる”

$$(S1) \varepsilon \rightarrow \text{sen} \supset (\text{sen}_1 \supset \text{sen})$$

$$(S2) \varepsilon \rightarrow (\text{sen} \supset (\text{sen}_1 \supset \text{sen}_{11}))$$

$$\supset ((\text{sen} \supset \text{sen}_1) \supset (\text{sen} \supset \text{sen}_{11}))$$

$$(S3) \varepsilon \rightarrow (\neg \text{sen}_1 \supset \neg \text{sen}) \supset (\text{sen} \supset \text{sen}_1)$$

$$(Q0) \varepsilon \rightarrow \text{sen} \supset \text{sen} \text{ [tvr} \downarrow \text{trm]}$$

$$(Q1) \varepsilon \rightarrow (\forall (\text{tvr})) (\text{sen})$$

$$\supset (\text{sen}) \text{ [(tvr)} \downarrow \text{(trm)}]$$

$$\varepsilon \rightarrow \text{sen} \text{ [tvr} \downarrow \text{trm]} \supset (\exists \text{tvr}) \text{sen}$$

$$(Q2) \varepsilon \rightarrow (\forall (\text{tvr})) ((\text{nf} [\text{tvr}]) \supset (\text{sen}))$$

$$\supset ((\text{nf} [\text{tvr}]) \supset (\forall (\text{tvr})) (\text{sen}))$$

$$\varepsilon \rightarrow \text{nf} [\text{tvr}] \wedge (\exists \text{tvr}) \text{sen}$$

$$\supset (\exists \text{tvr}) (\text{nf} [\text{tvr}] \wedge \text{sen})$$

$$(Q3) \varepsilon \rightarrow \text{nf} [\text{tvr}] \supset (\forall \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}]$$

$$\varepsilon \rightarrow (\exists \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}] \supset \text{nf} [\text{tvr}]$$

$$(Q4) \varepsilon \rightarrow (\text{sen} \supset \text{sen}_1)$$

$$\supset ((\forall \text{tvr}) \text{sen} \supset (\forall \text{tvr}) \text{sen}_1)$$

$$\varepsilon \rightarrow (\text{sen} \supset \text{sen}_1)$$

$$\supset ((\exists \text{tvr}) \text{sen} \supset (\exists \text{tvr}) \text{sen}_1)$$

$$(E2) \varepsilon \rightarrow \text{trm} = \text{trm}$$

$$(E3) \text{“trm} = \text{trm}_1 \text{ と } \text{trm}_1 = \text{trm}_2 \text{ から}$$

$$\text{trm} = \text{trm}_2 \text{ が導かれる”}$$

6.7 命題/述語論理の上の理論

命題 [述語] 論理を論理としてこれに従う理
論 (§5.4) のことを, “命題 [述語] 論理の上の
理論” と言い表わす。

6.8 メタ定理, 定理シエマ

6.8.1 メタ定理

命題論理の上の理論 \mathcal{T} に関する事実を述べ
るものとしての “定理” は, “……は \mathcal{T} の定理”

と言うときの“定理”に対して、メタ定理である。

例えば、“推論公式”、“演繹定理”は、メタ定理であり、ある文シエマを定理シエマ——代入して得られる文が定理となるところのシエマ——として特定する言明も、メタ定理である。

6.8.2 定理の証明と定理シエマの証明

定理シエマの証明は、他者がつぎのように認めるとき実現されたことになる：

《このシエマをもつ定理が証明されるとき的一般形式が、示されている》

“一般形式”を示すものは、やはり記号の列であり、それは新たなシエマである。

結局、定理シエマの証明とは、定理証明のシエマであり、定理シエマを証明するとは、定理証明のシエマをつくることである。そしてこのシエマをつくる言語は、理論の生成言語に対するメタ言語になる。

命題/述語論理上の理論で文を生成するようなものは、まだ導入していない^(註)。したがって、定理の証明をここで例示することはできない。(理論としての命題論理、述語論理には、文は存在しない!) しかし、命題/述語論理上の理論一般の定理シエマ(簡単に“命題/述語論理の定理シエマ”と言い表わす)とそれの証明は、この段階でも例示することができる。以下これを示す。

(註) われわれは§7で、自然数論をこのような理論として導入する。

6.8.3 命題論理の定理シエマの証明例

命題論理(の上の理論)のメタ定理として、つぎのものは周知である：

(T1) (“演繹定理”)

文 φ から文 ψ ^(註1)が演繹されるとき、 $\varphi \supset \psi$ は定理。

(T2) $\text{sen} \supset \text{sen}_1$ と $\text{sen}_1 \supset \text{sen}_2$ から、 $\text{sen} \supset \text{sen}_2$ が導かれる。

(T3) sen と sen_1 から $\text{sen} \wedge \text{sen}_1$ が導かれる。

また、つぎの定理シエマも周知のものである：

(T4) $\text{sen} \supset \text{sen}$

(T5) $\text{sen} \supset \neg \neg \text{sen}, \neg \neg \text{sen} \supset \text{sen}$

(T6) $\neg \text{sen} \supset (\text{sen} \supset \text{sen}_1)$

(T7) $(\text{sen} \supset \text{sen}_1) \supset (\neg \text{sen}_1 \supset \neg \text{sen})$

(T8) $(\text{sen} \supset \neg \text{sen}) \supset \neg \text{sen}$

(T9) $(\text{sen} \supset \text{sen}_{11}) \wedge (\text{sen}_1 \supset \text{sen}_{11})$
 $\supset ((\text{sen} \vee \text{sen}_1) \supset \text{sen}_{11})$

ここでは、(T4)が既に証明されているときの(T₁) (“演繹定理”)の証明と、(T₁)から(T8)が既に証明されているときの(T9)の証明を示す^(註2)。

“演繹定理”の証明については、それが $\langle \varphi \supset \psi$ の証明作成の実効的手続き \rangle を示すものであるという点を、特に強調しておく。また、(T9)の証明は、変形規則適用の仕方のデモンストレーションを目的とする。

(I) “演繹定理”の証明

φ からの ψ の演繹が

$$\varphi \wedge \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{n-1} \wedge \psi \quad (\theta_i \text{は文})$$

であるとする。

θ_1 は、

(1) 換言規則によって φ から導かれる

(2) 公理

のいずれかである。(1)の場合、同じ換言規則によって $\varphi \supset \varphi$ から $\varphi \supset \theta_1$ が導かれる。 $\varphi \supset \varphi$ が定理だから $\varphi \supset \theta_1$ も定理。(2)の場合、 θ_1 と公理 $\theta_1 \supset (\varphi \supset \theta_1)$ (S₁)に対する分離規則の適用で、 $\varphi \supset \theta_1$ が定理として得られる。

いま、 $\varphi \supset \theta_k$ ($k=1, \dots, i$) が定理であるとする。

θ_{i+1} の導出が θ_i に換言規則を適用することによる導出であるとき、同じ換言規則によって $\varphi \supset \theta_i$ から $\varphi \supset \theta_{i+1}$ が導出される。仮定により $\varphi \supset \theta_i$ は定理だから、 $\varphi \supset \theta_{i+1}$ も定理。

θ_{i+1} の導出が θ_i に対する換言規則の適用によるものでないとき、つぎのいずれかが成り立っている：

(1) θ_{i+1} は公理；

(2) 或る $k < i+1$ に対し、 θ_{i+1} は θ_k と同じ；

(3) 或る $k < i+1$ に対し θ_k が $\theta_i \supset \theta_{i+1}$ と同じで、 θ_i と $\theta_i \supset \theta_{i+1}$ に対する分離規則の適用

で, θ_{i+1} が導出される;

- (4) θ_i が或る $k < i$ に対する文 $\theta_k \supset \theta_{i+1}$ であって, θ_k と $\theta_k \supset \theta_{i+1}$ に対する分離規則の適用で, θ_{i+1} が導出される;

そしていずれの場合にも, $\varphi \supset \theta_{i+1}$ は定理になる。

実際, (1)の場合, θ_{i+1} と公理 $\theta_{i+1} \supset (\varphi \supset \theta_{i+1})$ (S_1) に対する分離規則の適用で, 定理 $\varphi \supset \theta_{i+1}$ を得る。

(2)の場合は, $\varphi \supset \theta_k$ が仮定から定理であることによる。

(3)の場合, 仮定から $\varphi \supset (\theta_i \supset \theta_{i+1})$ は定理。公理 $(\varphi \supset (\theta_i \supset \theta_{i+1})) \supset ((\varphi \supset \theta_i) \supset (\varphi \supset \theta_{i+1}))$ より, $(\varphi \supset \theta_i) \supset (\varphi \supset \theta_{i+1})$ は定理。さらに $\varphi \supset \theta_i$ が仮定より定理であるから, $\varphi \supset \theta_{i+1}$ も定理。

(4)の場合, 仮定より $\varphi \supset (\theta_k \supset \theta_{i+1})$ は定理。よって(3)と同じ考え方で $\varphi \supset \theta_{i+1}$ が定理であることを得る。

(III) (T9) の証明

$\varphi \vee \psi$ (仮定)	$\longleftarrow \text{sen} \vee \text{sen}_1$
	\downarrow (C4)
$\neg \varphi \supset \psi$	$\longleftarrow \neg \text{sen} \supset \text{sen}_1$
	\downarrow
$\neg \varphi \supset \psi$	$\longleftarrow \text{sen} \supset \text{sen}_1$
&	&
$\psi \supset \theta$ (仮定)	$\text{sen}_1 \supset \text{sen}_{11}$
	\downarrow (T2)
$\neg \varphi \supset \theta$	$\longleftarrow \text{sen} \supset \text{sen}_{11}$
\parallel	
$\neg \varphi \supset \theta$	$\longleftarrow \text{sen}_{11}$
&	&
$\varphi \supset \theta$ (仮定)	$\text{sen} \supset \text{sen}_1$
	\downarrow (T7), (MP)
$\neg \varphi \supset \theta$	$\longleftarrow \text{sen}_{11}$
&	&
$\neg \theta \supset \neg \varphi$	$\neg \text{sen}_1 \supset \neg \text{sen}$
\parallel	
$\neg \varphi \supset \theta$	$\longleftarrow \text{sen}_1 \supset \text{sen}_{11}$
&	&
$\neg \theta \supset \neg \varphi$	$\text{sen} \supset \text{sen}_1$
	\downarrow (T2)
$\neg \theta \supset \theta$	$\longleftarrow \text{sen} \supset \text{sen}_{11}$

\parallel	
$\neg \theta \supset \theta$	$\longleftarrow \text{sen}_1 \supset \text{sen}$
	\downarrow (C1)
$\neg \theta \supset \neg \neg \theta$	$\longleftarrow \text{sen}_1 \supset \neg \neg \text{sen}$
	\downarrow (T8)
$\neg \theta \supset \neg \neg \theta$	$\longleftarrow \text{sen}_1$
&	&
$(\neg \theta \supset \neg \neg \theta)$	$(\text{sen} \supset \neg \text{sen})$
$\supset \neg \neg \theta$	$\supset \neg \text{sen}$
\parallel	
$\neg \theta \supset \neg \neg \theta$	$\longleftarrow \text{sen}$
&	&
$(\neg \theta \supset \neg \neg \theta)$	sen
$\supset \neg \neg \theta$	$\supset \text{sen}_1$
	\downarrow (MP)
$\neg \neg \theta$	$\longleftarrow \text{sen}_1$
\parallel	
$\neg \neg \theta$	$\longleftarrow \neg \neg \text{sen}$
	\downarrow (C1)
θ	$\longleftarrow \text{sen}$

(T₁) の“演繹定理”により, 結局, $\varphi \supset \theta$ と $\psi \supset \theta$ から $(\varphi \wedge \psi) \supset \theta$ が導かれる。

(註1) φ, ψ はメタ記号。“演繹定理”の証明の中の $\varphi, \psi, \theta, \theta_1, \theta_{n-1}, \theta_i$, および (T9) の証明の中の φ, ψ, θ も同様。

(註2) (T₁) から (T8) は, 依存関係に従って, 例えば (T4), (T5), (T1), (T5), (T6), (T7), (T8), (T3) の順番で証明される。

6.8.4 述語論理の定理シエマの証明例

つぎは, 定理シエマである:

$$(T10) (\forall \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}] \leftrightarrow \text{nf} [\text{tvr}]$$

$$(\exists \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}] \leftrightarrow \text{nf} [\text{tvr}]$$

証明は, x を変項, φ を x が自由変項でない文として(‘ x ’, ‘ φ ’はメタ記号), つぎのようになされる:

	(tvr, x)
	(sen, φ)
$(\forall x) \varphi$	$\longleftarrow (\forall \text{tvr}) \text{sen}$

$$\begin{array}{ccc} & (\text{trm}, x) \downarrow (Q1) & \\ \varphi & \longleftarrow \text{sen} [\text{tvr} \downarrow \text{trm}] & \end{array}$$

演繹定理より, $(\forall x)\varphi \supset \varphi$ は定理。一方,

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \longleftarrow \text{nf} [\text{tvr}] & \\ & \downarrow (Q3) & \\ (\forall x)\varphi & \longleftarrow (\forall \text{tvr}) \text{nf} [\text{tvr}] & \end{array}$$

よって, $\varphi \supset (\forall x)\varphi$ は定理。そして,

$$\begin{array}{ccc} (\forall x)\varphi \supset \varphi & \longleftarrow \text{sen} & \\ \& & \& \\ \varphi \supset (\forall x)\varphi & \longleftarrow \text{sen}_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow (T3) & \\ ((\forall x)\varphi \supset \varphi) & \longleftarrow \text{sen} & \\ \wedge (\varphi \supset (\forall x)\varphi) & \longleftarrow \wedge \text{sen}_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \\ ((\forall x)\varphi \supset \varphi) & \longleftarrow (\text{sen} \supset \text{sen}_1) & \\ \wedge (\varphi \supset (\forall x)\varphi) & \longleftarrow \wedge (\text{sen}_1 \supset \text{sen}) & \\ & \downarrow (C5) & \end{array}$$

$$(\forall x)\varphi \leftrightarrow \varphi \longleftarrow \text{sen} \leftrightarrow \text{sen}_1$$

第二のシエマは, 第一のシエマを用いてつぎのように証明される:

$$\begin{array}{ccc} (\forall x)\varphi \leftrightarrow \varphi & \longleftarrow \text{sen} \leftrightarrow \text{sen}_1 & \\ & \downarrow (C0) & \\ \neg \neg (\forall x)\varphi \leftrightarrow \varphi & \longleftarrow \neg \neg \text{sen} \leftrightarrow \text{sen}_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \\ \neg \neg (\forall x)\varphi & \longleftarrow \neg \neg (\forall \text{tvr}) \text{sen} & \\ \leftrightarrow \varphi & \longleftarrow \leftrightarrow \text{sen} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow (C0) & \\ \neg \neg (\forall x) \neg \neg \varphi & \longleftarrow \neg \neg (\forall \text{tvr}) \neg \neg \text{sen} & \\ \leftrightarrow \neg \neg \varphi & \longleftarrow \leftrightarrow \neg \neg \text{sen} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \\ \neg \neg (\forall x) \neg \neg \varphi & \longleftarrow \neg \neg (\forall \text{tvr}) \neg \neg \text{sen} & \\ \leftrightarrow \neg \neg \varphi & \longleftarrow \leftrightarrow \neg \neg \text{sen} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow (C6) & \\ \neg (\exists x) (\neg \varphi) & \longleftarrow \neg (\exists \text{tvr}) \text{sen} & \\ \leftrightarrow \neg (\neg \varphi) & \longleftarrow \leftrightarrow \neg \text{sen} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \\ \neg (\exists x) \psi \leftrightarrow \neg \psi & \longleftarrow \neg \text{sen} \leftrightarrow \neg \text{sen}_1 & \\ & \downarrow (C6) & \end{array}$$

$$(\exists x) \psi \leftrightarrow \psi \longleftarrow \text{sen} \leftrightarrow \text{sen}_1$$

7 自然数論

本節では, 自然数論が理論

$$\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{U}, \mathcal{N})$$

として解釈可能であることを示す。

7.1 ペアノの公理まで

7.1.1 土台となる文生成システム

自然数論 \mathcal{T} は, 以下のように定義される文生成システム $\mathcal{S} = (\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{T}\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{N})$ を土台とする。

(1) $\mathcal{N}\mathcal{V}$ は, §6.4 で導入した“拡張された述語論理”——以下, 単に“述語論理”と呼ぶ——の $\mathcal{N}\mathcal{V}$ に

NUM : 数項生成に関する

NVR : 数変項記号生成に関する

を追加したもの。

(2) $\mathcal{T}\mathcal{V}$ は, 述語論理の $\mathcal{T}\mathcal{V}$ に

' : 1 変数関数記号

1 : 原初数定項記号

n : 原初数変項記号

を追加したもの。

(3) \mathcal{P} は, 述語論理の \mathcal{P} に

TRM \rightarrow NUM

TVR \rightarrow NVR

NUM \rightarrow NUM'

NUM \rightarrow NVR

NUM \rightarrow 1

NVR \rightarrow NVR₁

NVR \rightarrow n

を追加したもの^(註)。

(註) この定義によって, 式, 項, 変項, 数項, 数変項, がつぎのように定義されたことになる。

式は, 数項の等式である。

項は, 数項である。

変項は, 数変項である;

数項は,

(1) 数変項は数項である;

(2) 原初数定項記号 1 は数項である;

(3) 数項に ' を付け加えたものは, 数項である;

(4) 上の(1)-(3)の適用で生成されるもののみが, 数項で

ある。

数変項は、

- (1) 原初数変項記号 n は数変項である。
 (2) 数変項に $_1$ を付け加えたものは、数変項である；
 (3) 上の(1), (2)の適用で生成されるもののみが、数変項である。

特に、

$$\begin{aligned} 1, & \quad 1', & \quad 1'', & \quad \dots \\ n, & \quad n', & \quad n'', & \quad \dots \\ n_1, & \quad n_1', & \quad n_1'', & \quad \dots \\ n_{11}, & \quad n_{11}', & \quad n_{11}'', & \quad \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

が数項の全体、かつ項全体をなす。

7.1.2 “式”，“文”

述語論理に倣い (§6.3.3)，文生成システム \mathcal{G} が生成する文を“式”と呼び，“文”の語は，“自由変項を含まない式”を指すものと約束する。

注意：変項は、 n, n_1, n_{11}, \dots である。

7.1.3 式変形システム／推論システム

(I) \mathcal{G} の上の文変形システム

$$\mathcal{U} = (\mathcal{S}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{S} = (\mathcal{G}, \sigma, \mathcal{R})$$

は、以下のようになる：

(1-1) $\mathcal{G} = (\mathcal{N}\overline{V}, \mathcal{T}\overline{V}, \mathcal{P}, \mathcal{S}\overline{E}\mathcal{N})$ ：

(1-1-1) $\mathcal{N}\overline{V}$ は、述語論理の $\mathcal{N}\overline{V}$ に

$\mathcal{N}\overline{U}\mathcal{M}, \mathcal{N}$ ：数項シェマ記号の生成に関する

$\mathcal{N}\overline{V}\mathcal{R}$ ：数変項シェマ記号の生成に関する
を追加したもの。

(1-1-2) $\mathcal{T}\overline{V}$ は、 $\mathcal{T}\mathcal{V}$ と述語論理の $\mathcal{T}\overline{V}$ の合併に

num ：原初数項シェマ記号

nvr ：原初数変項シェマ記号

を追加したもの。

(1-1-3) \mathcal{P} は、述語論理の \mathcal{P} に、以下を追加したもの^(註)：

$$\begin{aligned} \overline{\text{TRM}} &\rightarrow \overline{\text{NUM}} \\ \overline{\text{NUM}} &\rightarrow \overline{\text{NVR}} \\ \overline{\text{NUM}} &\rightarrow \overline{\text{NUM}'} \\ \overline{\text{NUM}} &\rightarrow \overline{\text{NVR}} \\ \overline{\text{NUM}} &\rightarrow \overline{1} \\ \overline{\text{NUM}} &\rightarrow \overline{N} \\ \overline{N} &\rightarrow \overline{N}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{N} &\rightarrow \text{num} \\ \overline{\text{NVR}} &\rightarrow \overline{\text{NVR}}_1 \\ \overline{\text{NVR}} &\rightarrow \text{nvr} \\ (1-2) \quad \sigma &\text{は、述語論理の } \sigma \text{ に} \\ \overline{\text{NUM}} &\rightarrow \overline{\text{NUM}} \\ \overline{\text{NVR}} &\rightarrow \overline{\text{NVR}} \end{aligned}$$

を追加したもの。

(1-3) \mathcal{R}, \mathcal{D} は、述語論理のものと同じ。

(II) $\mathcal{U} = (\mathcal{S}, \mathcal{D})$ については、 \mathcal{U} の変更に対応する変更を行なうことの他に、つぎの“自然数の公理”を追加する：

$$(N0) \quad \text{num} = \text{num}_1 \rightarrow \text{num}' = \text{num}_1'$$

$$(N1) \quad \varepsilon \rightarrow \neg (\text{num}' = 1)$$

$$(N2) \quad \text{num}' = \text{num}_1' \rightarrow \text{num} = \text{num}_1$$

$$(N3) \quad \text{sen}[\text{nvr} \downarrow 1] \wedge (\text{sen} \supset \text{sen}[\text{nvr} \downarrow \text{nvr}']) \rightarrow \text{sen}$$

ここでの (N1), (N2), (N3) が、“ペアノの公理”と呼ばれているところのものである。

(註) このとき、

$$\text{num}, \text{num}_1, \text{num}_{11}, \dots$$

$$\text{nvr}, \text{nvr}_1, \text{nvr}_{11}, \dots$$

が数項シェマ記号、数変項シェマ記号の全て。

7.1.4 命題論理，述語論理との関係

自然数論は、述語論理の上の理論であり、特に、命題論理の上の理論である。

7.2 加法と乗法の導入

7.2.1 加法と乗法の導入

$\mathcal{T} = (\mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{U}, \mathcal{U})$ を以下のように変更することで、自然数の加法と乗法を導入する。

(I) \mathcal{G} に対し、

(1) $\mathcal{T}\mathcal{V}$ に、記号

$$+, \times$$

を追加する；

(2) \mathcal{P} に、

$$\text{TRM} \rightarrow (\text{TRM}) + (\text{TRM})$$

$$\text{TRM} \rightarrow (\text{TRM}) \times (\text{TRM})$$

を追加する。

(II) $u = (S, D)$, $S = (\overline{q}, \sigma, R)$ に対し、

(1) \overline{q} の

(1.1) $\neg \overline{V}$ に、記号

$+, \times$

を追加する；

(1.2) P に、

$$\overline{TRM} \rightarrow (\overline{TRM}) + (\overline{TRM})$$

$$\overline{TRM} \rightarrow (\overline{TRM}) \times (\overline{TRM})$$

を追加する。

(2) D につぎの文変形規則を追加する：

$$(A1) \quad num + 1 \rightleftharpoons num'$$

$$(A2) \quad num + num_1' \rightleftharpoons (num + num_1)'$$

$$(M1) \quad num \times 1 \rightleftharpoons num$$

$$(M2) \quad num \times num_1' \rightleftharpoons num \times num_1 + num$$

(III) u の変更に、 $\hat{u} = (\hat{S}, \hat{D})$ の変更を対応させる。

7.2.2 加法、乗法の基本定理

つぎは、定理シェマである：

(0) $num = num_1$

$$\supset num + num_{11} = num_1 + num_{11}$$

(1) $num + num_1' = num' + num_1$

(2) $num + num_1 = num_1 + num$

(3) $(num + num_1) + num_{11}$
 $= num + (num_1 + num_{11})$

(4) $num \times num_1 = num_1 \times num$

(5) $(num \times num_1) \times num_{11}$
 $= num \times (num_1 \times num_{11})$

(6) $(num + num_1) \times num_{11}$
 $= num \times num_{11} + num_1 \times num_{11}$

証明の例として、以下、(2)の証明を示す。

(2-1) 先ず、 $1+1=1+1$ は定理：

$$\begin{array}{ccc} & \varepsilon & \\ & \downarrow & \\ 1+1=1+1 & \longleftarrow & trm = trm \end{array} \quad (E1)$$

(2-2) 演繹定理を用いて

$$x+1=1+x \rightarrow x'+1=1+x'$$

を証明する：

$$\begin{array}{ccc} x+1=1+x & \longleftarrow & num = num_1 \\ & \downarrow & (N0) \\ (x+1)' = (1+x)' & \longleftarrow & num' = num_1' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \\ (x+1)' = (1+x)' & \longleftarrow & (num+1)' = trm \\ & & \downarrow (A1) \\ (x')' = (1+x)' & \longleftarrow & (num')' = trm \\ \parallel & & \\ (x')' = (1+x)' & \longleftarrow & num' = trm \\ & & \downarrow (A1) \\ x'+1 = (1+x)' & \longleftarrow & num+1 = trm \\ \parallel & & \\ x'+1 = (1+x)' & \longleftarrow & trm = (num+num_1)' \\ & & \downarrow (A2) \\ x'+1 = 1+x' & \longleftarrow & trm = num+num_1' \end{array}$$

(2-3) $x+1=1+x$ の証明：

$$\begin{array}{ccc} 1+1=1+1 & \longleftarrow & sen \ [nvr \downarrow 1] \\ \& & \& \\ x+1=1+n & \longleftarrow & sen \\ \supset x'+1=1+x' & \longleftarrow & \supset sen \ [nvr \downarrow nvr'] \\ & & \downarrow (N3) \\ x+1=1+x & \longleftarrow & sen \end{array}$$

(2-4) 演繹定理を用いて

$$x+b=b+x \supset x+b' = b'+x$$

を証明する。

$$\begin{array}{ccc} x+b=b+x & \longleftarrow & num = num_1 \\ & & \downarrow (N0) \\ (x+b)' = (b+x)' & \longleftarrow & num' = num_1' \\ \parallel & & \\ (x+b)' = (b+x)' & \longleftarrow & (num+num_1)' = trm \\ & & \downarrow (A2) \\ x+b' = (b+x)' & \longleftarrow & num+num_1' = trm \\ \parallel & & \\ x+b' = (b+x)' & \longleftarrow & trm = (num+num_1)' \\ & & \downarrow (A2) \\ x+b' = b+x' & \longleftarrow & trm = num+num_1' \\ & & \downarrow (1) \\ x+b' = b+x' & \longleftarrow & trm = trm_1 \\ \& & \& \\ b+x' = b'+x & \longleftarrow & trm_1 = trm_{11} \\ & & \downarrow (E3) \\ x+b' = b'+x & \longleftarrow & trm = trm_{11} \end{array}$$

(2-5) 最後に、 $a+b=b+a$ がつぎのように証明される：

$$\begin{array}{lcl}
a+1=1+a & \longleftarrow \text{sen} & [\text{nvr} \downarrow 1] \\
& \& & \\
a+x=x+a & \text{sen} & \\
\supset a+x'=x'+a & \supset \text{sen} & [\text{nvr} \downarrow \text{nvr}'] \\
& & \downarrow (N3) \\
a+x=x+a & \longleftarrow \text{sen} & \\
& & \downarrow (Q0) \\
a+b=b+a & \longleftarrow \text{sen} & [\text{tvr} \downarrow \text{trm}]
\end{array}$$

7.3 順序関係の導入

7.3.1 順序関係の導入

自然数論 $\mathcal{T} = (\mathcal{Q}, \mathcal{Q}, \mathcal{N}, \mathcal{N})$ を以下のように拡張することで、自然数の順序関係 \leq を導入する。

(1) \mathcal{Q} に対し、

(1-1) $\mathcal{T}\mathcal{V}$ に、記号 $<, \leq$ を追加する。

(1-2) \mathcal{P} に、

$$\text{SEN} \rightarrow (\text{NUM}) < (\text{NUM})$$

$$\text{SEN} \rightarrow (\text{NUM}) \leq (\text{NUM})$$

を追加する。

(2) $\mathcal{N} = (\mathcal{S}, \mathcal{D})$, $\mathcal{S} = (\overline{\mathcal{Q}}, \sigma, \mathcal{R})$ の $\overline{\mathcal{Q}}$ に対し、

(2-1) $\mathcal{T}\mathcal{V}$ に、記号 $<, \leq$ を追加する。

(2-2) $\overline{\mathcal{P}}$ に、

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{NUM}}) < (\overline{\text{NUM}})$$

$$\overline{\text{SEN}} \rightarrow (\overline{\text{NUM}}) \leq (\overline{\text{NUM}})$$

を追加する。

(3) \mathcal{D} に、

$$(\exists (\text{nvr})) (\text{num} + \text{nvr} = \text{num}_1) \rightleftharpoons \text{num} < \text{num}_1$$

$$\text{num} \leq \text{num}_1 \rightleftharpoons \neg (\text{num} < \text{num}_1) \supset (\text{num} = \text{num}_1)$$

$$(\rightleftharpoons (\text{num} < \text{num}_1) \vee (\text{num} = \text{num}_1))$$

を追加する。

(4) \mathcal{N} の変更に対応して、 \mathcal{N} を変更する。

7.3.2 順序関係の基本定理

以下は定理シエマであり、 \leq が順序関係であることを示す：

(1) $\text{num} \leq \text{num}$

(2) $((\text{num} \leq \text{num}_1) \wedge (\text{num}_1 \leq \text{num}))$

$$\supset \text{num} = \text{num}_1$$

(3) $((\text{num} \leq \text{num}_1) \wedge (\text{num}_1 \leq \text{num}_{11}))$

$$\supset \text{num} \leq \text{num}_{11}$$

また、(2)の証明では、証明すべき定理シエマとして以下のものが問題になる：

$$[1] \neg (\text{num}' = \text{num})$$

$$[2] \neg (\text{num} + \text{num}_1 = \text{num})$$

$$[3] ((\text{trm} = \text{trm}_1) \wedge \neg (\text{trm} = \text{trm}_{11}))$$

$$\supset \neg (\text{trm}_1 = \text{trm}_{11})$$

$$[4] \text{num} + \text{num}_{11} = \text{num}_1 \supset \neg (\text{num} = \text{num}_1)$$

$$[5] \text{num} < \text{num}_1 \supset \neg (\text{num} = \text{num}_1)$$

$$[6] \neg (\text{num} < \text{num})$$

$$[7] \text{num} + \text{num}_{11} = \text{num}_1 \supset \text{num} < \text{num}_1$$

$$[8] (\text{num} < \text{num}_1 \wedge \text{num}_1 < \text{num}_{11}) \supset \text{num} < \text{num}_{11}$$

ここでは、つぎのことを確認する意味で、(2)の証明に至るこれらの定理シエマの証明をすべて示すことにする：

《手続きとして示せば極めて煩瑣なことを、手続きを殊更意識に上らずにわれわれのカラダは実践できる》

[1] (N1) より $\neg (1' = 1)$ 。また、

$$\begin{array}{lcl}
(a')' = a' & \longleftarrow \text{num}' = \text{num}_1' & \\
& & \downarrow (N2) \\
a' = a & \longleftarrow \text{num} = \text{num}_1 &
\end{array}$$

より、

$$\neg (a' = a) \supset \neg ((a')' = a')$$

よって、(N3) から所期の定理シエマを得る。

[2] 先ず、 $\neg (1+b=1)$ ：

$$\begin{array}{lcl}
& & \varepsilon \\
& & \downarrow (N1) \\
\neg (b' = 1) & \longleftarrow \neg (\text{num}' = 1) & \\
& & \downarrow (A1) \\
\neg (b+1=1) & \longleftarrow \neg (\text{num} + 1 = 1) & \\
\parallel & & \\
\neg (b+1=1) & \longleftarrow \neg (\text{num} + \text{num}_1 = 1) & \\
& & \downarrow \S 7.2.2, (2) \\
\neg (1+b=1) & \longleftarrow \neg (\text{num}_1 + \text{num} = 1) &
\end{array}$$

また、

$$\begin{array}{lcl}
a' + b = a' & \longleftarrow \text{num} + \text{num}_1 = \text{num}_{11} & \\
& & \downarrow \S 7.2.2, (1) \\
b + a' = a' & \longleftarrow \text{num}_1 + \text{num} = \text{num}_{11} & \\
\parallel & & \\
b + a' = a' & \longleftarrow \text{num} + \text{num}_1' = \text{num}_{11} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & \downarrow (A2) & \\
 (b+a)'=a' & \leftarrow (num+num_1)'=num_{11} & \\
 \parallel & & \\
 (b+a)'=a' & \leftarrow num'=num_1' & \\
 & \downarrow (N2) & \\
 b+a=a & \leftarrow num+num_1=num_{11} & \\
 & \downarrow (E2) & \\
 a+b=a & \leftarrow num_1+num=num_{11} & \\
 \text{よって, } \neg(a+b=a) \supset \neg(a'+b=a'). & (N3) \text{ から, } \neg(a+b=a). &
 \end{array}$$

[3]項 f, g, h (記号 ' $f, 'g, 'h$ ' はメタ記号) に対し, 以下の両方向の変形が成り立つ:

$$\begin{array}{lcl}
 (f=g) \wedge \neg(f=h) & \leftarrow sen \wedge sen_1 & \\
 \supset \neg(g=h) & \supset sen_{11} & \\
 & \updownarrow (C4) & \\
 \neg((f=g) & \leftarrow \neg(sen & \\
 \supset \neg \neg(f=h)) & \supset \neg sen_1) & \\
 \supset \neg(g=h) & \supset sen_{11} & \\
 \parallel & & \\
 \neg((f=g) & \leftarrow \neg sen_1 & \\
 \supset \neg \neg(f=h)) & & \\
 \supset \neg(g=h) & \supset \neg sen & \\
 & \updownarrow (T7), (C1) & \\
 (g=h) & \leftarrow sen & \\
 \supset ((f=g) \supset \neg \neg(f=h)) & \supset sen_1 & \\
 \parallel & & \\
 (g=h) & \leftarrow sen_{11} & \\
 \supset ((f=g) \supset \neg \neg(f=h)) & \supset (sen_1 \supset \neg \neg sen) & \\
 & \updownarrow (C1) & \\
 (g=h) & \leftarrow sen_{11} & \\
 \supset ((f=g) \supset (f=h)) & \supset (sen_1 \supset sen) &
 \end{array}$$

一方, $(g=h) \supset ((f=g) \supset (f=h))$ は, (E3) より定理。

[4]

$$\begin{array}{lcl}
 a+c=b \text{ (仮定)} & \leftarrow sen & \\
 & \downarrow [2] & \\
 a+c=b & \leftarrow sen & \\
 \& & \& \\
 \neg(a+c=a) & \leftarrow \neg(num+num_1=num) & \\
 \parallel & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 a+c=b & \leftarrow trm=trm_1 & \\
 \& & \& \\
 \neg(a+c=a) & \leftarrow \neg(trm=trm_{11}) & \\
 & \downarrow [3] & \\
 \neg(b=a) & \leftarrow \neg(trm_1=trm_{11}) & \\
 \parallel & & \\
 \neg(b=a) & \leftarrow \neg(trm=trm_1) & \\
 & \downarrow [2] & \\
 \neg(a=b) & \leftarrow \neg(trm_1=trm) &
 \end{array}$$

[5]数項 a, b と, これらの中に自由変項として現われない数変項 x に対し,

$$\begin{array}{lcl}
 a < b & \leftarrow num < num_1 & \\
 & \downarrow (\text{定義}) & \\
 (\exists x) & \leftarrow (\exists num_{11}) & \\
 (a+x=b) & (num+num_{11}=num_1) & \\
 & \downarrow [4] & \\
 (\exists x) & \leftarrow (\exists num_{11}) & \\
 (a+x=b) & (num+num_{11}=num_1) & \\
 \& & \& \\
 (a+x=b) & (num+num_{11}=num_1) & \\
 \supset \neg(a=b) & \supset \neg(num=num_1) & \\
 & \downarrow (Q4) & \\
 (\exists x) & \leftarrow (\exists num_{11}) & \\
 (a+x=b) & (num+num_{11}=num_1) & \\
 \& & \& \\
 (\exists x) & (\exists num_{11}) & \\
 (a+x=b) & (num+num_{11}=num_1) & \\
 \supset (\exists x) & \supset (\exists num_{11}) & \\
 (\neg(a=b)) & (\neg(num=num_1)) & \\
 & \downarrow (MP) & \\
 (\exists x) & \leftarrow (\exists num_{11}) & \\
 (\neg(a=b)) & (\neg(num=num_1)) & \\
 \parallel & & \\
 (\exists x) (\neg(a=b)) & \leftarrow (\exists trv) nf [tvr] & \\
 & \downarrow (Q3) & \\
 \neg(a=b) & \leftarrow nf [tvr] & \\
 [6] & & \\
 & \downarrow \epsilon & \\
 & \downarrow (E1) & \\
 a=a & \leftarrow trm=trm & \\
 \parallel & & \\
 a=a & \leftarrow num=num_1 &
 \end{array}$$

↓ [5]

$\neg(a < a) \quad \leftarrow \neg(\text{num} < \text{num}_1)$

[7] 数項 a, b, c と, これらの中に自由変項として現われない数変項 x に対し,

$a + c = b \quad \leftarrow \text{sen} \quad [\text{trv} \downarrow \text{trm}]$

↓ (Q1)

$(\exists x)(a + x = b) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}) \text{sen}$

||

$(\exists x) \quad \leftarrow (\exists \text{num}_{11})$

$(a + x = b) \quad \leftarrow (\text{num} + \text{num}_{11} = \text{num}_1)$

↓ (定義)

$a < b \quad \leftarrow \text{num} < \text{num}_1$

[8] 数項 a, b, c と, これらの中に自由変項として現われない数変項 x, y に対し,

$a < b \wedge b < c \quad \leftarrow \text{num} < \text{num}_1 \wedge \text{sen}$

↓

$(\exists x)(a + x = b) \quad \leftarrow (\exists \text{num}_{11})$

↓

$\wedge b < c \quad \wedge \text{sen}$

||

$(\exists x)(a + x = b) \quad \leftarrow \text{sen}$

$\wedge b < c \quad \wedge \text{num} < \text{num}_1$

↓

$(\exists x)(a + x = b) \quad \leftarrow \text{sen}$

$\wedge (\exists y) \quad \wedge (\exists \text{num}_{11})$

↓

$(b + y = c) \quad (\text{num} + \text{num}_{11} = \text{num}_1)$

||

$(\exists x)(a + x = b) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}) \text{sen}$

$\wedge (\exists y)(b + y = c) \quad \wedge \text{nf} [\text{trv}]$

↓ (Q2)

$(\exists x)(a + x = b) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}) \text{sen}$

$\wedge (\exists y)(b + y = c) \quad \wedge \text{nf} [\text{trv}]$

||

$(\exists x)(a + x = b) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}_1) (\text{nf} [\text{trv}])$

$\wedge (\exists y)(b + y = c) \quad \wedge (\exists \text{trv}) \text{sen}$

↓ (Q2)

$(\exists x)((\exists y) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}_1)((\exists \text{trv})$

$(a + x = b \wedge b + y = c)) \quad (\text{nf} [\text{trv}] \wedge \text{sen}))$

||

$(\exists x)((\exists y) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}_1)((\exists \text{trv})$

$(a + x = b \quad (\text{num} = \text{num}_1$

$\wedge b + y = c))$

||

$(\exists x)((\exists y) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}_1)((\exists \text{trv})$

$((a + x) + y = c)) \quad ((\text{num} + \text{num}_1) + \text{num}_{11} = \text{num}_{111}))$

||

$(\exists x)((\exists y) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}_1)((\exists \text{trv})$

$(a + (x + y) = c)) \quad ((\text{num} + (\text{num}_1 + \text{num}_{11})) = \text{num}_{111}))$

||

$(\exists x)((\exists y) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}_1)((\exists \text{trv})$

$(a + (x + y) = c)) \quad (\text{num} + \text{num}_{11} = \text{num}_1)$

||

$(\exists x)((\exists y) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}_1)((\exists \text{trv})$

$(a < c)) \quad (\text{num} < \text{num}_1)$

||

$(\exists x)((\exists y) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}_1)((\exists \text{trv})$

$(a < c)) \quad \text{nf} [\text{trv}]$

↓ (Q3)

$(\exists x)(a < c) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}_1) \text{nf} [\text{trv}]$

||

$(\exists x)(a < c) \quad \leftarrow (\exists \text{trv}) \text{nf} [\text{trv}]$

↓ (Q3)

$a < c \quad \leftarrow \text{nf} [\text{trv}]$

(2) の証明:

$a \leq b \wedge b \leq a \quad \leftarrow \text{num} \leq \text{num}_1 \wedge \text{sen}$

↓ (定義)

$((\neg(a < b) \supset a = b) \quad \leftarrow (\neg(\text{num} < \text{num}_1)$

↓

$\supset \text{num} = \text{num}_1)$

||

$\wedge (b \leq a) \quad \wedge \text{sen}$

||

$((\neg(a < b) \supset a = b) \quad \leftarrow \text{sen}$

$\wedge (b \leq a) \quad \wedge (\text{num} < \text{num}_1)$

↓ (定義)

$(\neg(a < b) \supset a = b) \quad \leftarrow \text{sen}$

$\wedge (\neg(b < a) \supset a = b) \quad \wedge (\neg(\text{num} < \text{num}_1)$

↓

$\supset \text{num} = \text{num}_1)$

